

**Interpolation mit C^1 - und C^2 -Splines
auf Quadrangulierungen**

N. Kohlmüller

Nr. 248/1999

Zugangsnummer: 02/7849

Signatur:

UNIVERSITÄT MANNHEIM
Bereichsbibliothek Mathematik und Informatik

Interpolation mit C^1 - und C^2 -Splines auf Quadrangulierungen

Norbert Kohlmüller

Zusammenfassung

In dieser Arbeit behandeln wir die Interpolation mit C^1 - und C^2 -Splines auf beliebigen, insbesondere nicht-konvexen Quadrangulierungen. Hierfür verwenden wir eine Unterteilung von Lai und Schumaker [15]. Für diese Unterteilung konstruieren wir einen kubischen C^1 -Spline, der für jede differenzierbare Funktion f den Funktionswert und die partiellen Ableitungen in allen Eckpunkten interpoliert. Für die Interpolation mit C^2 -Splines bestimmen wir einen Interpolanten vom Grad 7.

1 Einleitung

Neben Unterteilungsmethoden für Triangulierungen wurden in den letzten Jahren zunehmend auch Quadrangulierungen untersucht. Quadrangulierungen haben gegenüber Unterteilungen von Triangulierungen den Vorteil, dass sie weniger Dreiecke und im allgemeinen einen niedrigeren Polynomgrad benötigen. So beschreibt Lai [14] die Interpolation mit kubischen C^1 -Splines auf konvexen Quadrangulierungen. Hierbei wird jedes Viereck durch Einzeichnen der beiden Diagonalen in vier Dreiecke unterteilt. Gegenüber einer Triangulierung wird durch diese Unterteilung die Anzahl der Dreiecke nur verdoppelt, und benötigt somit weniger Dreiecke als eine Unterteilung mit Clough-Tocher Elementen. Die Interpolation mit C^1 - und C^2 -Splines auf konvexen Quadrangulierungen behandeln Nürnberger und Zeilfelder [16]. Konvexe Quadrangulierungen haben auch Laghchim-Lahlou und Sablonnière [12] untersucht. Sie geben einen Interpolanten für die Fälle $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$ und $d = 2\rho + 1$ an. Für beliebige Quadrangulierungen beschreiben Lai und Schumaker [15] die Interpolation mit C^2 -Splines vom Grad 6. Für ihre Unterteilung konnten sie einen Interpolanten bestimmen, der optimale Approximationsordnung besitzt.

Wir behandeln in dieser Arbeit die Interpolation mit C^1 - und C^2 -Splines auf beliebigen Quadrangulierungen. Wir verwenden hier die Unterteilung von Lai und Schumaker [15]. Sei \mathcal{V} die Menge der Eckpunkte der Quadrangulierung, dann beschreiben wir einen Interpolanten s , der für jede differenzierbare Funktion f das Interpolationsproblem

$$D_x^\nu D_x^\mu s(v) = D_x^\nu D_x^\mu f(v), \quad v \in \mathcal{V}, \nu + \mu \leq r$$

löst. Damit liefern wir eine Verallgemeinerung des kubischen Interpolanten von Lai [14] für konvexe Quadrangulierungen.

Für unsere Beweise verwenden wir Bernstein-Bézier-Methoden. Im diesem Abschnitt werden deshalb die Grundlagen über Bernstein-Bézier-Polynome und bivariate Splines wieder-

holt. Anschließend beschreiben wir unsere Interpolationsmethode mit C^1 - und C^2 -Splines auf beliebigen Quadrangulierungen.

1.1 Bernstein-Bézier-Polynome

Für die Bernstein-Bézier-Darstellung werden die *baryzentrischen Koordinaten* eines Punktes $v \in \mathbb{R}^2$ bezüglich eines Dreiecks $T = \triangle(v_1, v_2, v_3)$ benötigt. Diese Koordinaten erhält man als eindeutige Lösung $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \\ 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}$$

Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}_+^3$ mit $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = d$ heißt $B_\alpha^d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$B_\alpha^d(\lambda) := \frac{d!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3}$$

Bernstein-Bézier-Polynom vom Grad d . Jedes Polynom $p \in \tilde{\Pi}_d$ hat eine eindeutige Darstellung (vgl. de Boor [4] und Farin [10])

$$p(v) = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d(\lambda(v))$$

Die Koeffizienten c_α heißen die *Bernstein-Bézier-Koeffizienten* von p . Weiter bezeichnen wir mit

$$P_\alpha := \frac{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}{d}$$

die *Bernstein-Bézier-Punkte* eines Dreiecks $T = \triangle(v_1, v_2, v_3)$.

Für einen Richtungsvektor $z \neq 0$ und eine differenzierbare Funktion f definieren wir die (nicht-normierte) Richtungsableitung von f durch

$$D_z f(v) = z \operatorname{grad} f(v)$$

Nach Farin [10] gilt nun der folgende Satz.

Satz 1.1. Seien $T = \triangle(v_1, v_2, v_3)$ und $\tilde{T} = \triangle(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$ zwei Dreiecke, $p : T \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{p} : \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Polynome mit der Bernstein-Bézier-Darstellung

$$p(v) = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d(\lambda(v))$$

$$\tilde{p}(v) = \sum_{|\alpha|=d} \tilde{c}_\alpha B_\alpha^d(\tilde{\lambda}(v))$$

und $s : T \cup \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$s(v) := \begin{cases} p(v) & v \in T \\ \tilde{p}(v) & v \in \tilde{T} \setminus T \end{cases}$$

(i) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ zwei Vektoren und ζ_1, ζ_2 die zugehörigen baryzentrischen Richtungsvektoren bezüglich T . Dann gilt für $\nu + \mu \leq d$

$$D_{z_1}^\nu D_{z_2}^\mu p = \frac{d!}{(d - \nu - \mu)!} \sum_{|\alpha|=d-\nu-\mu} \sum_{|\beta|=\nu} \sum_{|\gamma|=\mu} c_{\alpha+\beta+\gamma} B_\beta^\nu(\zeta_1) B_\gamma^\mu(\zeta_2) B_\alpha^{d-\nu-\mu}(\lambda)$$

(ii) Es gelte $v_1 = \tilde{v}_1$ und λ_2, λ_3 seien die baryzentrischen Koordinaten von \tilde{v}_2, \tilde{v}_3 bezüglich T . Dann ist s in v_1 genau dann ρ -mal stetig differenzierbar, wenn für alle $|\alpha| = d$ mit $\alpha_2 + \alpha_3 \leq \rho$ gilt:

$$\tilde{c}_\alpha = \sum_{|\beta|=\alpha_2} \sum_{|\gamma|=\alpha_3} c_{(\alpha_1, 0, 0) + \beta + \gamma} B_\beta^{\alpha_2}(\lambda_2) B_\gamma^{\alpha_3}(\lambda_3)$$

(iii) Es gelte $v_1 = \tilde{v}_1$ und $v_2 = \tilde{v}_2$ und λ seien die baryzentrischen Koordinaten von \tilde{v}_3 bezüglich T . Dann ist s über die gemeinsame Kante $\overline{v_1 v_2}$ genau dann r -mal stetig differenzierbar, wenn für alle $|\alpha| = d$ mit $\alpha_3 \leq r$ gilt:

$$\tilde{c}_\alpha = \sum_{|\beta|=\alpha_3} c_{(\alpha_1, \alpha_2, 0) + \beta} B_\beta^{\alpha_3}(\lambda)$$

Aus diesem Satz erhalten wir die beiden folgenden Aussagen, die den Zusammenhang zwischen den Bernstein-Bézier-Koeffizienten und den Ableitungen in den Eckpunkten und an den Kanten beschreiben.

Satz 1.2. Sei $T = \triangle(v_1, v_2, v_3)$ ein Dreieck, $z_i := v_i - v_1$, $i = 2, 3$ und $p \in \Pi_d$ mit der Bernstein-Bézier-Darstellung $\sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d(\lambda)$.

(i) Für $\nu + \mu \leq d$ gilt

$$D_{z_2}^\nu D_{z_3}^\mu p(v_1) = \frac{d!}{(d - \nu - \mu)!} \sum_{k=0}^\nu \sum_{m=0}^\mu \binom{\nu}{k} \binom{\mu}{m} (-1)^{\nu-k+\mu-m} c_{d-k-m, k, m}$$

(ii) Für $|\alpha| = d$ gilt

$$c_\alpha = \sum_{\nu=0}^{\alpha_2} \sum_{\mu=0}^{\alpha_3} \binom{\alpha_2}{\nu} \binom{\alpha_3}{\mu} \frac{(d - \nu - \mu)!}{d!} D_{z_2}^\nu D_{z_3}^\mu p(v_1)$$

Satz 1.3. Sei $T := \triangle(v_1, v_2, v_3)$ ein Dreieck, $p \in \tilde{\Pi}_d$ in der Bernstein-Bézier-Darstellung $p = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d(\lambda)$ und $\nu \leq d$. Weiter seien z ein Vektor, der nicht parallel zur Kante $e := \overline{v_1 v_2}$ verläuft, $0 < \lambda_0 < \dots < \lambda_{k-1} < 1$ für $k \leq d - \nu + 1$ und $u_i := \lambda_i v_1 + (1 - \lambda_i) v_2$.

(i) Es gilt

$$D_z^\nu p(u_j) = d! \sum_{\substack{|\alpha|=d-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} c_{\alpha+\beta} B_\beta^\nu(\zeta) \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \lambda_j^{\alpha_1} (1 - \lambda_j)^{\alpha_2}$$

(ii) Sei $j \in \mathbb{N}$ mit $j + k - 1 \leq d - \nu$ und $I = \{(i, d - \nu - i, \nu) : i = j, \dots, j + k - 1\}$, dann gilt für $\alpha \in I$:

$$c_\alpha = \sum_{i=0}^{k-1} a_i D_z^\nu P(u_i) + \sum_{\substack{\alpha_3 \leq \nu \\ \alpha \notin I}} b_\alpha c_\alpha$$

mit geeigneten Koeffizienten a_i, b_α .

Satz 1.2 und 1.3 sind für die Interpolation wichtig. Sie zeigen, dass man die Bernstein-Bézier-Koeffizienten direkt aus den Ableitungen in den Eckpunkten und an den Kanten berechnen kann. Die Abbildung 1 zeigt eine Situation, die für Hermite-Interpolanten typisch ist. Hier werden die mit \bullet bezeichneten Koeffizienten durch Ableitungen in den Eckpunkten nach Satz 1.2 bestimmt. Die mit $*$ gekennzeichneten Koeffizienten ergeben sich anschließend nach Satz 1.3 aus Ableitungen über die Kanten.

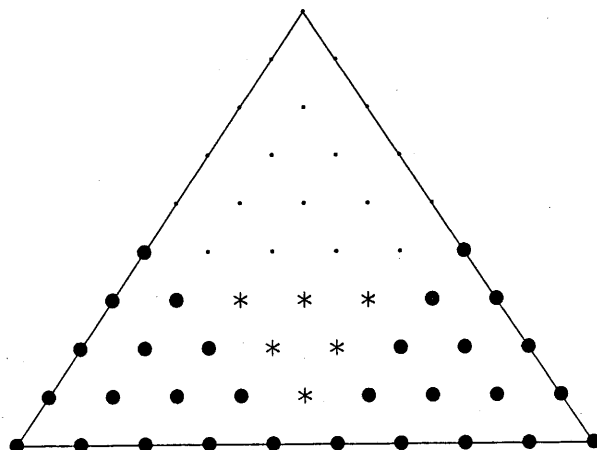


Abbildung 1: Interpolation in den Eckpunkten (\bullet) und an den Kanten ($*$)

1.2 Bivariate Splinefunktionen auf Triangulierungen

Im folgenden sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Polygon und $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine Triangulierung von Ω . Wir bezeichnen mit

- V_I, V_B, V : die Anzahl der inneren, äußeren, aller Eckpunkte
- E_I, E_B, E : die Anzahl der inneren, äußeren, aller Kanten
- N : die Anzahl der Dreiecke
- S : die Anzahl der singulären Eckpunkte

von Δ . Hierbei heißt ein innerer Eckpunkt singulär, wenn er von zwei sich kreuzenden Linien gebildet wird. Nach Euler gilt

$$\begin{aligned} E_B &= V_B \\ N &= V_B + 2V_I - 2 \\ E_I &= V_B + 3V_I - 3 \end{aligned} \tag{1}$$

Für eine Triangulierung Δ von Ω heißt

$$S_d^r(\Delta) := \left\{ s \in C^r(\Omega) : s|_{T_n} \in \tilde{\Pi}_d \right\}$$

der Raum der *bivariaten Splinefunktionen* vom Grad d auf Δ . Seien v_1, \dots, v_V die Eckpunkte von Δ , dann ist für $\rho \geq r$ durch

$$S_d^{r,\rho}(\Delta) := \{ s \in S_d^r(\Delta) : s \in C^\rho(v_i), i = 1, \dots, V \}$$

ein Unterraum von $S_d^r(\Delta)$, genannt *Super-Spliner Raum* vom Grad d definiert.

Ist $T_i \in \Delta$ ein Dreieck, dann ist $s|_{T_i}$ ein Polynom und kann nach Abschnitt 1.1 eindeutig in der Bernstein-Bézier-Darstellung $s|_{T_i}(v) = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha^i B_\alpha^d(\lambda_i(v))$ geschrieben werden. Wir können deshalb jeden Spline s durch die Menge der Bernstein-Bézier-Koeffizienten $\{c_\alpha^i : |\alpha| = d, i = 1, \dots, N\}$ beschreiben. Analog zum vorherigen Abschnitt setzen wir

$$\mathcal{P} := \{P_\alpha^n : |\alpha| = d, n = 1, \dots, N\}$$

für die Menge aller Bernstein-Bézier-Punkte der Triangulierung $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$. Mit dieser Bezeichnung können wir den Begriff der bestimmenden Menge einführen (vgl. Alfeld und Schumaker [2] und Ibrahim und Schumaker [11]).

Definition 1.4. Eine Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ heißt *bestimmende Menge* von $S_d^{r,\rho}(\Delta)$ auf \mathcal{A} , wenn für alle $s \in S_d^{r,\rho}(\Delta)$ gilt:

$$c_\alpha^i = 0 \quad \forall P_\alpha^i \in \mathcal{D} \implies c_\alpha^i = 0 \quad \forall P_\alpha^i \in \mathcal{A}$$

\mathcal{D} heißt *minimale bestimmende Menge* von $S_d^{r,\rho}(\Delta)$ auf \mathcal{A} , wenn es keine bestimmende Menge mit weniger Elementen gibt.

Die Koeffizienten c_α der Punkte einer bestimmenden Menge \mathcal{D} legen also alle Koeffizienten der Punkte aus \mathcal{A} fest. Wie Alfeld und Schumaker [2] gezeigt haben gilt der folgende wichtige Zusammenhang zwischen der Anzahl einer bestimmenden Menge und der Dimension des zugehörigen Spliner Raums.

Lemma 1.5. Ist \mathcal{D} eine bestimmende Menge von $S_d^{r,\rho}(\Delta)$, dann gilt $\dim S_d^{r,\rho}(\Delta) \leq \#\mathcal{D}$ und $\dim S_d^{r,\rho}(\Delta) = \#\mathcal{D}$, falls \mathcal{D} minimal ist.

Ist \mathcal{D} eine minimale bestimmende Menge von $s \in S_d^{r,\rho}(\Delta)$, dann definieren die Koeffizienten c_α^i zu den Bernstein-Bézier-Punkten $P_\alpha^i \in \mathcal{D}$ eindeutig einen Spline $s \in S_d^{r,\rho}(\Delta)$. Es genügt deshalb im folgenden, minimale bestimmende Mengen des Spliner Raums anzugeben. Mit Hilfe der Differenzierbarkeitsbedingungen nach Satz 1.1 kann in der Regel gezeigt werden, ob eine Menge \mathcal{D} eine bestimmende Menge ist. Die Minimalität einer bestimmenden Menge folgt nach Lemma 1.5, wenn die Dimension des Spliner Raums bekannt ist. Hierzu gibt es zwei wichtige Ergebnisse von Schumaker [20, 22], die wir nun zitieren.

Satz 1.6. Sei v ein Eckpunkt der Dreiecke T_1, \dots, T_N , E_n die gemeinsame Kante der Dreiecke T_n und T_{n+1} und $\Delta_v := \{T_1, \dots, T_N\}$. Weiter gelte $2\rho + 1 \leq d$.

(i) Ist v ein äußerer Eckpunkt, dann gilt

$$\dim S_d^{r,\rho}(\Delta_v) = \binom{d+2}{2} + (N-1) \left[\binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right]$$

(ii) Ist v ein innerer Eckpunkt und e die Anzahl der inneren Kanten mit unterschiedlicher Steigung, dann gilt

$$\dim S_d^{r,\rho}(\Delta_v) = \binom{\rho+2}{2} + N \left[\binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right] + \sigma$$

mit

$$\sigma := \sum_{i=\rho-r+1}^{d-r} (r+i+1-ie)_+$$

Mit dem Ergebnis aus Satz 1.6 hat Schumaker [20, 22] eine untere Grenze für die Dimension des Splineraums $S_d^{r,\rho}(\Delta)$ bestimmt.

Satz 1.7. Sei V_I die Anzahl der inneren Eckpunkte, E_I die Anzahl der inneren Kanten von Δ und e_n die Anzahl der Kanten mit unterschiedlicher Steigung im Eckpunkt v_n . Dann gilt für $2\rho+1 \leq d$

$$\begin{aligned} \dim S_d^{r,\rho}(\Delta) &\geq \binom{d+2}{2} - \left[\binom{d+2}{2} - \binom{\rho+2}{2} \right] V_I \\ &\quad + \left[\binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right] E_I + \sum_{n=1}^{V_I} \sigma_n \end{aligned}$$

mit

$$\sigma_n := \sum_{i=\rho-r+1}^{d-r} (r+i+1-ie_n)_+$$

2 Unterteilung für Quadrangulierungen

In diesem Kapitel beschreiben wir Interpolationsmengen für C^1 - und C^2 -Splines auf Quadrangulierungen. Wir untersuchen eine Unterteilung, die Lai und Schumaker [15] für die Interpolation mit C^2 -Splines vom Grad 6 verwendet haben. Bei der Unterteilung von Lai und Schumaker wird jedes Viereck Q_i wie folgt in vier Dreiecke $T_{i,1}, \dots, T_{i,4}$ unterteilt:

- (i) Ist Q_i konvex, dann fügt man beide Diagonalen in Q_i hinzu.
- (ii) Ist Q_i nicht konvex¹, dann werden die Diagonale innerhalb von Q_i , sowie zwei Kanten von den übrigen Eckpunkten zum Mittelpunkt der Diagonale hinzugefügt.

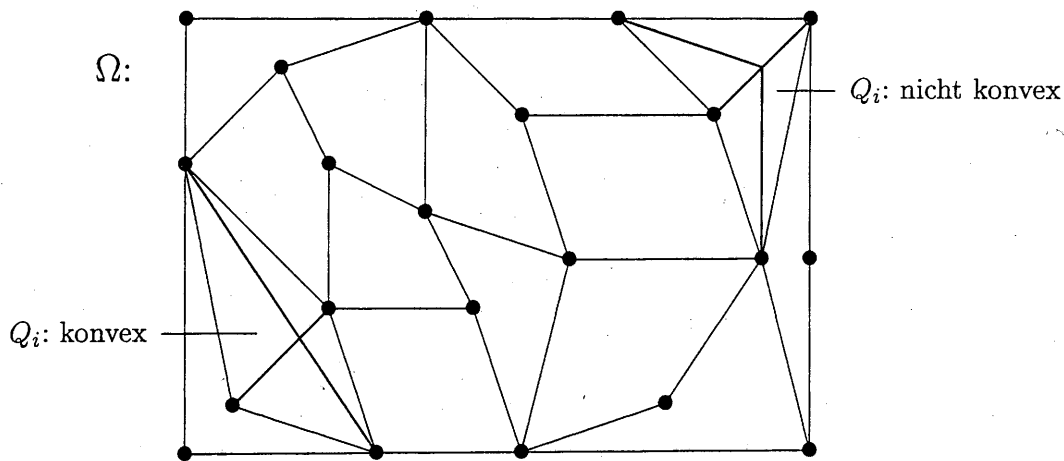


Abbildung 2: Unterteilung nach Lai und Schumaker

Im folgenden bezeichnen wir mit \diamond die Triangulierung, die wir durch diese Unterteilung erhalten. Wie Lai und Schumaker [15] wollen wir ausschließen, dass es zwei benachbarte Vierecke $\diamond(v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $\diamond(v_1, v'_2, v_3, v_4)$ gibt, bei denen die Kanten $\overline{v_1 v_4}$ und $\overline{v_3 v_4}$ kollinear, aber die beiden Kanten $\overline{v_2 v_4}$ und $\overline{v'_2 v_4}$ nicht kollinear sind. In diesem Fall kann man eine Modifikation der Quadrangulierung durch Tauschen von Kanten vornehmen, indem die Kanten $\overline{v_1 v_4}$ und $\overline{v_3 v_4}$ durch die beiden Kanten $\overline{v_2 v_4}$ und $\overline{v'_2 v_4}$ ersetzt werden (vgl. Abbildung 3). Die neue Quadrangulierung enthält nun ein konvexes und ein nicht-konvexes Viereck. Da die Quadrangulierung die gleichen Eckpunkte besitzt, ist diese Methode für die Interpolation mit scattered data keine Einschränkung, da hier im allgemeinen nur Werte an den Eckpunkten gegeben sind. Probleme entstehen nur, wenn Interpolationswerte an den Kanten gegeben sind.

Für die Parameter der Quadrangulierung verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

- $E_I^\diamond, E_B^\diamond, E^\diamond$: Anzahl der inneren, äußeren, aller Kanten
- $V_I^\diamond, V_B^\diamond, V^\diamond$: Anzahl der inneren, äußeren, aller Eckpunkte
- S^\diamond : Anzahl der singulären Eckpunkte
- $N_K^\diamond, N_N^\diamond, N^\diamond$: Anzahl der konvexen, nicht-konvexen, aller Vierecke

Die Bezeichnungen ohne Superskript \diamond werden für die zugehörige Triangulierung \diamond verwendet. Es gelten die folgenden Beziehungen (vgl. Lai und Schumaker [15]):

$$\begin{aligned}
 N^\diamond &= \frac{1}{2} (V_B^\diamond + 2V_I^\diamond - 2) \\
 E_I^\diamond &= \frac{1}{2} (V_B^\diamond + 4V_I^\diamond - 4) \\
 E_B^\diamond &= V_B^\diamond
 \end{aligned} \tag{2}$$

¹Zur Vereinfachung der Unterteilungsmethoden in den folgenden Abschnitten wird ein Viereck mit zwei kollinearen Kanten als nicht konvex bezeichnet, obwohl es streng genommen konvex ist.

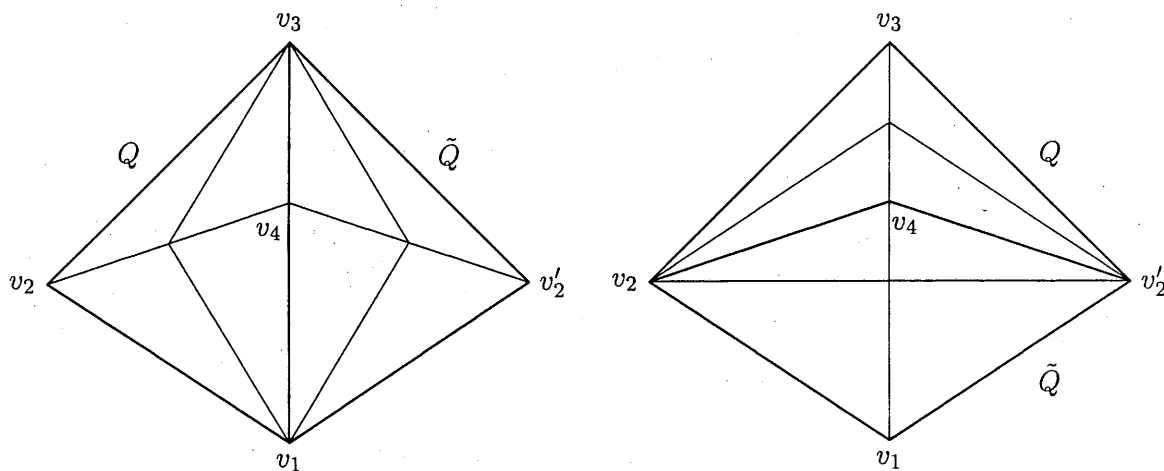


Abbildung 3: Tauschen von kollinearen Kanten

2.1 Interpolation mit C^1 -Splines

Zunächst behandeln wir den Fall $S_3^1(\diamond)$ und konstruieren eine minimale bestimmende Menge für den Splineraum $S_3^1(\diamond)$. Aus dieser leiten wir dann ein Hermite-Interpolationsschema ab.

Lemma 2.1. Sei $Q = \diamond(v_1, v_2, v_3, v_4)$ und v_5 der Punkt im Innern von Q , der durch die Unterteilung entsteht. Man setze $T_i := \triangle(v_i, v_{i+1}, v_5)^2$, $i = 1, 2, 3, 4$.

(i) Ist Q konvex, dann ist

$$\mathcal{D} := \{P_{300}^i, P_{210}^i, P_{201}^i, P_{111}^i : i = 1, 2, 3, 4\}$$

eine minimale bestimmende Menge von $S_3^1(\{T_1, \dots, T_4\})$.

(ii) Ist Q nicht konvex und $\angle v_{i-1}v_iv_{i+1} \neq 180^\circ$, $i = 1, 2, 3$, dann ist

$$\mathcal{D} := \{P_{300}^i, P_{210}^i, P_{201}^i, P_{111}^i : i = 1, 2, 3, 4\} \setminus \{P_{111}^4\}$$

eine minimale bestimmende Menge von $S_3^1(\{T_1, \dots, T_4\})$.

Beweis: Ist Q konvex, dann folgt die Behauptung nach Lai [14].

Sei nun Q nicht konvex und alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte aus \mathcal{D} gleich 0. Wir nehmen zunächst an, dass $\angle v_3v_4v_1 \neq 180^\circ$ gilt. OBdA kann angenommen werden, dass die Kanten $\overline{v_2v_5}$ und $\overline{v_4v_5}$ kollinear sind (vgl. Abbildung 5). Die Koeffizienten c_{120}^i berechnen sich direkt aus der C^1 -Bedingung an den Eckpunkten von Q . Nach Voraussetzung sind alle Kanten $\overline{v_iv_{i+1}}$ und $\overline{v_{i+1}v_{i+2}}$ nicht kollinear, so dass man die Koeffizienten c_{012}^1 und c_{012}^2 aus den C^1 -Bedingungen über die inneren Kanten erhält.

² $i + 1$ modulo 4

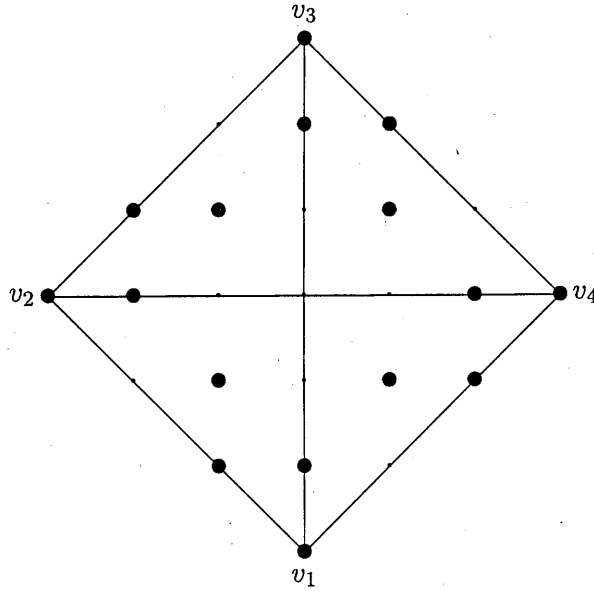


Abbildung 4: Bestimmende Menge für konvexes Viereck

Somit verbleiben noch vier Koeffizienten, die in Abbildung 5 mit a_1, a_2, a_3, a_4 bezeichnet sind. Seien λ die baryzentrischen Koordinaten von v_1 bezüglich T_3 und μ die baryzentrischen Koordinaten von v_4 bezüglich T_1 , dann ergibt sich aus den C^1 -Bedingungen über die Kanten $\overline{v_3v_5}$ und $\overline{v_4v_5}$ das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mu_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mu_3 \\ 1 & -\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 1 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

Für die Koeffizientenmatrix erhalten wir die Determinante $-\lambda_2\mu_3^2$. Da die Kanten $\overline{v_2v_5}$ und $\overline{v_4v_5}$ kollinear sind gilt $\mu_3 \geq 1$. Umgekehrt sind die Kanten $\overline{v_1v_5}$ und $\overline{v_3v_5}$ nicht kollinear, so dass $\lambda_2 \neq 0$ gilt. Also ist die Determinante ungleich 0 und es folgt $a_i = 0$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Somit ist \mathcal{D} eine bestimmende Menge und wegen

$$\dim S_3^1(\{T_1, T_2, T_3, T_4\}) = 15 = \#\mathcal{D}$$

sogar minimal.

Sei nun $\angle v_3v_4v_1 = 180^\circ$ (vgl. Abbildung 6). Die Koeffizienten c_{120}^i für $i = 1, 2, 3, 4$ und c_{012}^i für $i = 1, 2$ berechnen sich wie im ersten Fall. Da die Kanten $\overline{v_1v_4}$ und $\overline{v_3v_4}$ kollinear sind, erhält man direkt den Koeffizienten c_{111}^4 aus der C^1 -Bedingung über die Kante $\overline{v_4v_5}$. Die verbleibenden drei Koeffizienten c_{012}^4 , c_{102}^4 und c_{003}^4 ergeben sich nun induktiv aus den C^1 -Bedingungen über die Kanten $\overline{v_1v_5}$ und $\overline{v_4v_5}$. Also ist \mathcal{D} eine bestimmende Menge und es folgt wiederum aus

$$\dim S_3^1(\{T_1, T_2, T_3, T_4\}) = 15 = \#\mathcal{D}$$

dass \mathcal{D} minimal ist. □

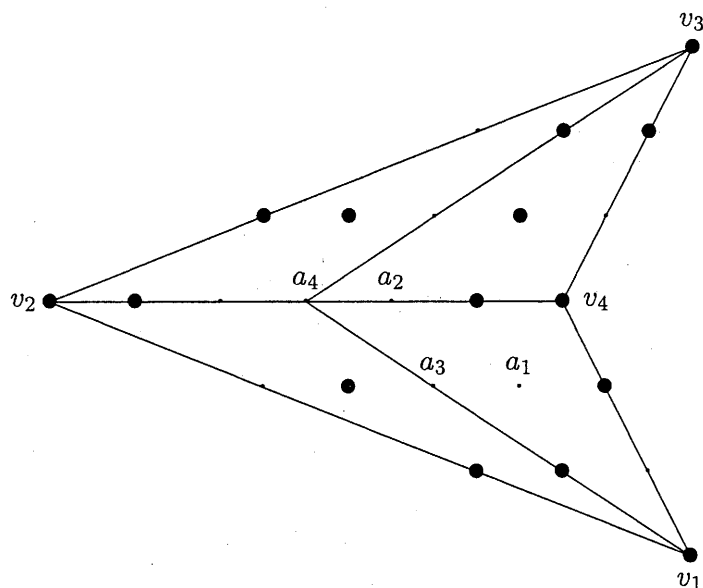


Abbildung 5: Bestimmende Menge für nicht konvexes Viereck

Wir werden nun ein Interpolationsschema für $S_3^1(\diamond)$ angeben. Hierzu müssen wir zunächst eine geeignete Nummerierung der Vierecke von \diamond wählen. Aus Lemma 2.1 wird deutlich, daß ein nicht-konvexes Viereck Q_i maximal drei Kanten zur Teilquadrangulierung $\{Q_1, \dots, Q_{i-1}\}$ haben kann. Andernfalls sind durch die C^1 -Bedingungen an den Kanten und in den Eckpunkten alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten c_α mit $\alpha_3 \leq 1$ bestimmt. Somit ist auch der Koeffizient c_{111}^{24} im Dreieck $T_{i,4}$ bestimmt. Für ein nicht-konvexes Viereck Q_i berechnet sich dieser aber nach Lemma 2.1 aus den übrigen 15 Koeffizienten, so dass das Gleichungssystem im allgemeinen keine Lösung hat.

Wir müssen deshalb eine Nummerierung der Vierecke finden, so dass $\{Q_1, \dots, Q_{i-1}\}$ für jedes nicht konvexe Viereck Q_i maximal drei Nachbarn von Q_i enthält. Zudem müssen wir nach Lemma 2.1 fordern, dass die zwei anliegenden Kanten in den Eckpunkten $v_{i,1}$, $v_{i,2}$ und $v_{i,3}$ nicht kollinear sein dürfen. Nur die beiden Kanten im Eckpunkt $v_{i,4}$ dürfen kollinear sein. Offensichtlich kann ein Viereck maximal einen Winkel mit 180° haben. Somit ist zu klären, ob man eine Nummerierung der Vierecke finden kann, so dass dieser Winkel für ein Viereck Q_i immer am Rand der Teilquadrangulierung \diamond_i liegt. Dies ist offensichtlich nicht möglich, wenn die beiden kollinearen Kanten gemeinsame Kanten von zwei Vierecken Q_i und Q_j sind (vgl. Abbildung 7). In der Einleitung zu dem Kapitel haben wir gezeigt, dass man die Kanten tauschen kann, wenn die beiden Diagonalen nicht kollinear sind. Andernfalls ist $v_{i,4}$ ein singulären Eckpunkt, so dass die Dimension um eins anwächst. Wir können deshalb, den Koeffizienten c_{111}^{24} im vierten Dreieck zusätzlich wählen. Mit Lemma 2.1 und Satz 1.7 erhalten wir die folgende bestimmende Menge für die beiden Vierecke (vgl. Abbildung 8).

Lemma 2.2. Seien $Q_i = \diamond(v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $Q_j = \diamond(v_1, v'_2, v_3, v_4)$ zwei Vierecke, so dass

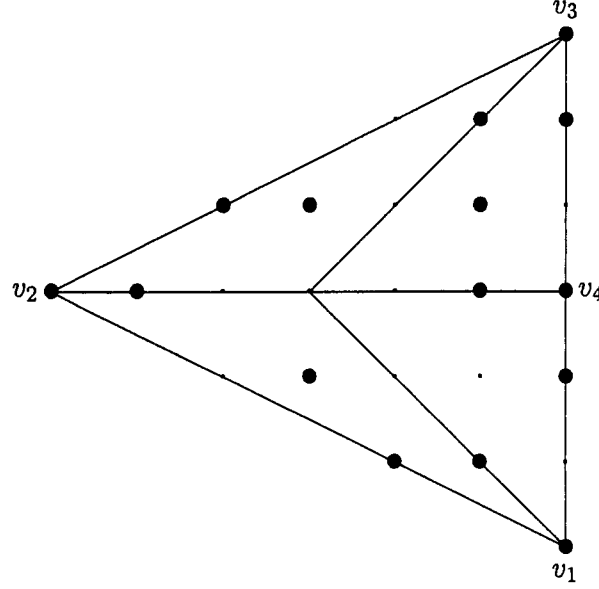


Abbildung 6: Viereck mit zwei kollinearen Kanten

v_4 ein singulärer Eckpunkt in \diamond ist. Dann ist

$$\mathcal{D} := \left\{ P_{300}^k, P_{210}^k, P_{201}^k, P_{111}^k : k \in \{i_1, i_2, j_1, j_2\} \right\} \cup \left\{ P_{030}^{i_3}, P_{120}^{i_3}, P_{021}^{i_3}, P_{111}^{i_3} \right\}$$

eine bestimmende Menge für $S_3^1(\diamond)$ auf $Q_i \cup Q_j$.

Solche Elemente mit einem singulären Eckpunkt können wir somit in einem Schritt behandeln, und wir wählen im folgenden eine Nummerierung der Vierecke, so dass die beiden zugehörigen Vierecke eines solchen Elements aufeinanderfolgende Indizes haben. Anhand der minimalen bestimmenden Menge aus Abbildung 8 sieht man, dass sich diese Elemente wie konvexe Vierecke verhalten. In beiden Fällen können wir es zulassen, dass die bestehende Teilquadrangulierung bereits alle vier äußeren Kanten des Elements enthält.

Nach dieser Vorüberlegung können wir somit eine Nummerierung der Vierecke wählen, bei der alle konvexen Vierecke und Elemente von Vierecken mit einem singulären Eckpunkt höhere Indizes besitzen als die nicht konvexen Vierecke. Für die Untersuchung der nicht konvexen Vierecke kann deshalb angenommen werden, dass eine Teilquadrangulierung gegeben ist, die keine solche Elemente mehr enthält. In diesem Fall ist natürlich zugelassen, dass die Teilquadrangulierung Löcher enthält. Für diese Quadrangulierungen werden wir nun zu zeigen, dass man eine Nummerierung der Vierecke finden kann, so dass für jedes Viereck Q_i mit zwei kollinearen Kanten mindestens eine Kante eine äußere Kante von \diamond_i ist.

Lemma 2.3. *Sei $\diamond = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ eine Quadrangulierung, die keine konvexen Vierecke oder Paare von Vierecken mit einem gemeinsamen singulären Eckpunkt enthält. Dann gibt es ein Viereck Q_i mit mindestens einer äußeren Kante e , so dass entweder e eine kollineare Kante von Q_i ist, oder alle Kanten von Q_i nicht kollinear sind.*

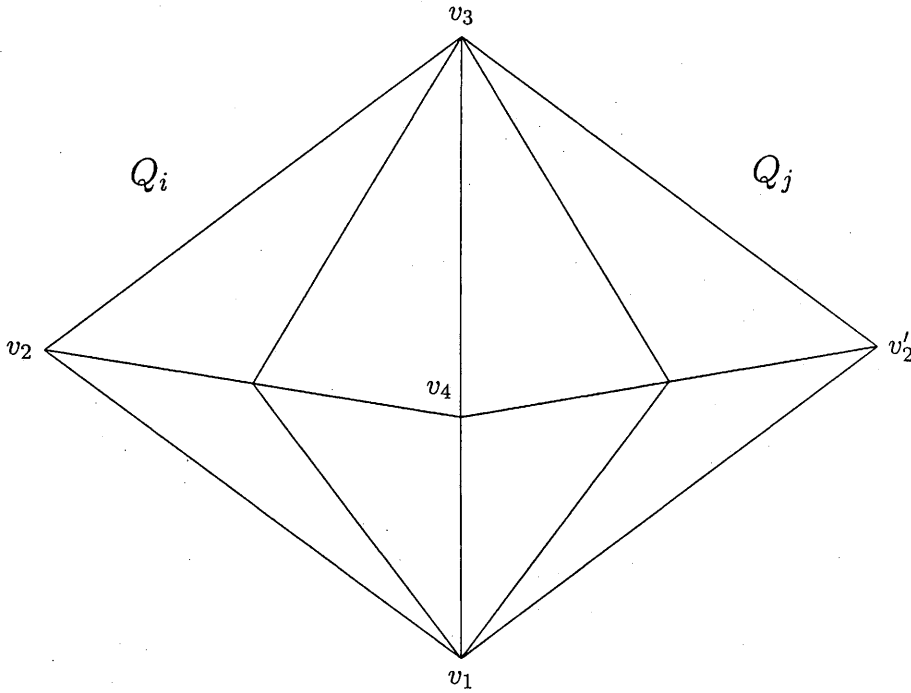


Abbildung 7: Zwei Vierecke mit kollinearen Kanten

Beweis: Angenommen es gäbe eine Quadrangulierung, die die Bedingung nicht erfüllt. Seien $\{R_1, \dots, R_m\} \subseteq \diamond$ die Vierecke mit mindestens einer äußeren Kante, dann muss R_i zwei kollineare Kanten besitzen, die keine äußeren Kanten von \diamond sind. Die Eckpunkte von R_i seien wieder wie in Lemma 2.1 nummeriert. Es lassen sich nun zwei Fälle unterscheiden:

- (i) Die beiden Kanten $\overline{v_1v_2}$ und $\overline{v_2v_3}$ sind äußere Kanten. Die beiden anderen Kanten sind innere Kanten.
- (ii) Nur ein Kante $\overline{v_1v_2}$ oder $\overline{v_2v_3}$ ist eine äußere Kante.

Betrachten wir den ersten Fall, dann zeigt sich, dass v_1 und v_3 äußere Eckpunkte zweier weiterer Vierecke R_j und R_k sein müssen. Andernfalls sind die Voraussetzungen nicht erfüllt, da eine der beiden kollinearen Kanten $\overline{v_1v_4}$ bzw. $\overline{v_3v_4}$ eine äußere Kante wäre. Entsprechende Aussagen erhält man im zweiten Fall für die Eckpunkte v_1 und v_2 bzw. v_2 und v_3 . Wir definieren einen Graphen $G = (V, E)$ mit den Knoten $V = \{R_1, \dots, R_m\}$ und den Kanten E . Hierbei gilt $(R_j, R_k) \in E$ genau dann, wenn R_j und R_k einen gemeinsamen äußeren Eckpunkt haben. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass jeder Knoten von G genau zwei Kanten besitzt. Also hat G einen Zyklus $R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_k}, R_{i_1}$, so dass die zugehörige Quadrangulierung ein Polygon P umschließt (vgl. Abbildung 9).

Wegen der Voraussetzung können die kollinearen Seiten zweier Vierecke R_{i_j} und $R_{i_{j+1}}$ nicht zusammenfallen. Somit muss $k \geq 3$ gelten. Also besitzt P einen konvexen Eckpunkt (vgl. v in Abbildung 9), dessen angrenzende Kanten $\overline{vw_1}$ und $\overline{vw_2}$ nach Voraussetzung keine äußeren Kanten der Quadrangulierung sein dürfen. In allen drei Eckpunkten sind

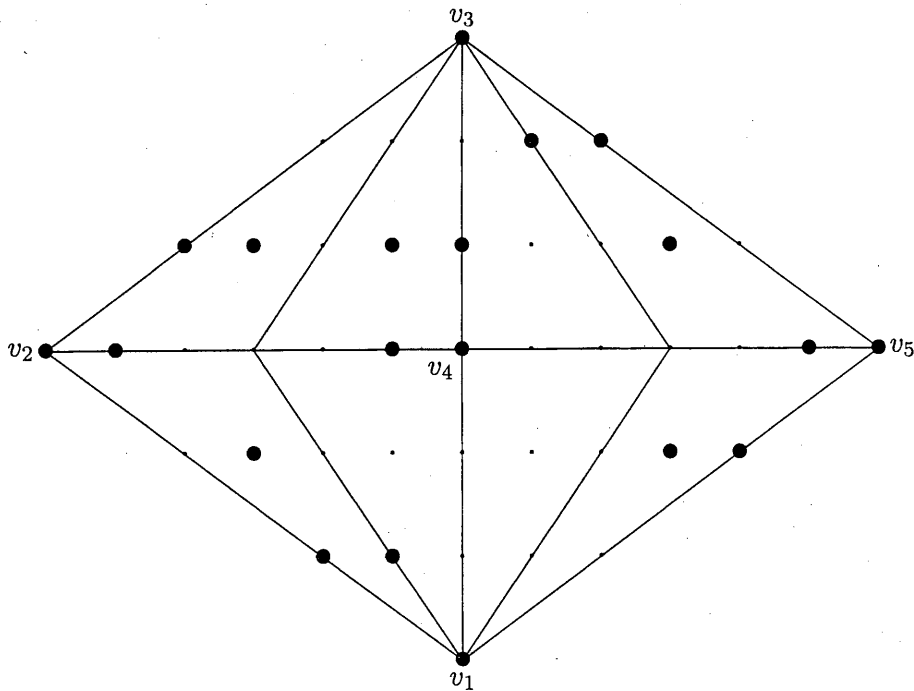


Abbildung 8: Element mit singulärem Eckpunkt

die Winkel der anliegenden Kanten kleiner oder gleich 180° , wobei mindestens ein Winkel echt kleiner ist. Fügt man nun im Eckpunkt ein Viereck Q an, so gibt es zwei Möglichkeiten, die in Abbildung 10 dargestellt sind.³

Sei $\tilde{P} = P \setminus Q$, dann entsteht im ersten Fall für v ein neuer Eckpunkt \tilde{v} , während v in dem anderen Fall erhalten bleibt. In beiden Fällen gelten jedoch für das neue Polygon \tilde{P} im Eckpunkt v bzw. \tilde{v} die gleichen Bedingungen wie für P . Dies wiederholt man, bis alle Vierecke von \diamond angefügt wurden. Schließlich müssen mindestens zwei Kanten auf der nicht-konvexen Seite eines Vierecks am Rand von \diamond liegen. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme. \square

Mit Hilfe von Lemma 2.3 können wir nun eine minimale bestimmende Menge von $S_3^1(\diamond)$ angeben. Hierzu wird zunächst eine geeignete Nummerierung der Vierecke gewählt. Im ersten Schritt entfernen wir alle konvexen Vierecke und Paare von Vierecken mit einem singulären Eckpunkt aus der Quadrangulierung. Die verbleibende Teilquadrangulierung erfüllt somit die Voraussetzungen für Lemma 2.3. Nach dem Lemma gibt es nun ein äußeres Viereck, so dass entweder alle Kanten paarweise nicht kollinear sind, oder eine kollineare Kante am Rand der Teilquadrangulierung liegt. Dieses Viereck wird entfernt und anschließend mit der verbleibenden Quadrangulierung fortgefahren, bis alle Vierecke entfernt wurden. Die umgekehrte Reihenfolge, in der wir die Vierecke entfernt haben, definiert nun die Nummerierung der Vierecke. Hiermit erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 2.4. Sei $\diamond = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ eine Quadrangulierung, deren Vierecke nach dem oben

³Als Sonderfall kann das Viereck Q auch zwei kollineare Kanten in \tilde{v} bzw. \tilde{w}_1 haben.

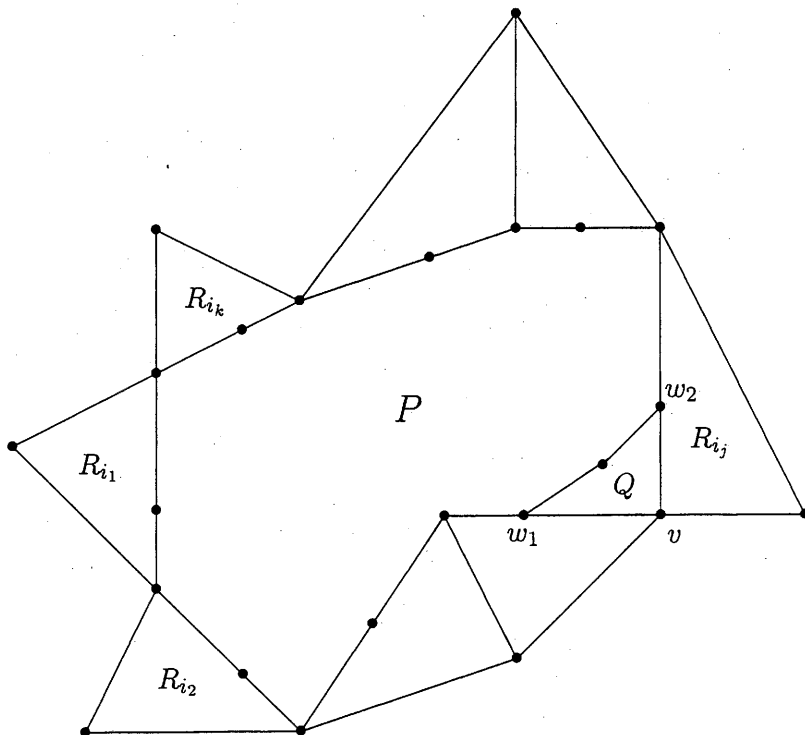


Abbildung 9: Äußere Vierecke einer Teilquadrangulierung

beschriebenen Verfahren nummeriert sind. Wir definieren die Menge \mathcal{D} , bestehend aus den folgenden Bernstein-Bézier-Punkten:

- (i) Sei v ein Eckpunkt von \diamond und T_i ein Dreieck von \diamond mit Eckpunkt v . Dann wähle man die drei Punkte in $D_1(v) \cap T_i$.
- (ii) Sei e eine Kante von \diamond , Q_i das Viereck mit Kante e , das den kleinsten Index besitzt und $T_{i,j}$ das Dreieck in Q_i mit Kante e . Ist Q_i konvex, dann wähle man den Punkt $P_{111}^{i,j}$. Ist Q_i nicht konvex, dann nummerieren wir die Kanten $e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}, e_{i,4}$ von Q_i entsprechend der aufsteigenden Folge der benachbarten Vierecke von Q_i . Somit bezeichnet $e_{i,1}$ die gemeinsame Kante zum benachbarten Viereck $Q_{i,1}$ mit dem niedrigsten Index, $e_{i,2}$ die gemeinsame Kante zum benachbarten Viereck $Q_{i,2}$ mit dem nächst höheren Index usw. Gilt nun $e \neq e_{i,4}$, dann wähle man den Punkt $P_{111}^{i,j}$.
- (iii) Es seien Q_i und Q_k zwei benachbarte Vierecke mit einem singulären Eckpunkt v . Dann wähle man genau einen Punkt $P_{111}^{i,j}$ in einem Dreieck $T_{i,j}$ mit Eckpunkt v .

Dann ist \mathcal{D} eine minimale bestimmende Menge von $S_3^1(\diamond)$ und es gilt:

$$\dim S_3^1(\diamond) = 3V^\circ + E^\circ + S^\circ - N_N^\circ$$

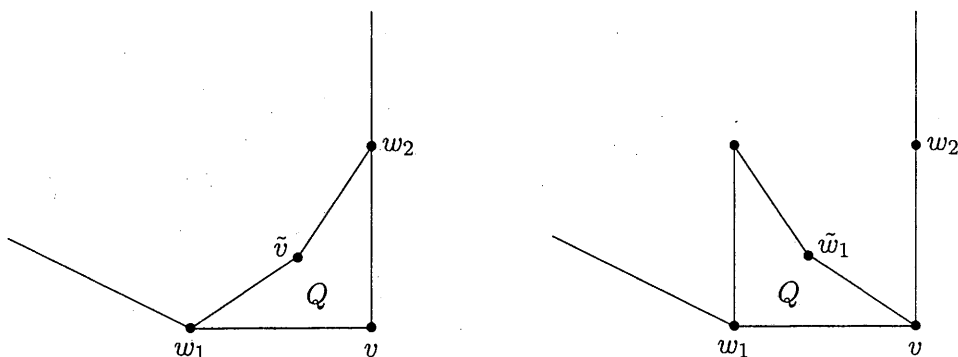


Abbildung 10: Anfügen eines Vierecks Q

Beweis: Es gilt $\#\mathcal{D} = 3V^\circ + E - N_N^\circ + S^\circ$. Nach Satz 1.7 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \dim S_3^1(\Diamond) &\geq 3V_B + 2V_I + S + 1 \\
 &= 10 - 7V_I + 3E_I + S \\
 &= 10 - 7(V_I^\circ + N^\circ) + 3(E_I + 4N^\circ) + (S^\circ + N_K^\circ) \\
 &= 3V^\circ + E^\circ + S^\circ - N_N^\circ
 \end{aligned}$$

Also genügt es zu zeigen, dass \mathcal{D} eine bestimmende Menge von $S_3^1(\Diamond)$ ist. Es seien alle Koeffizienten zu den Bernstein-Bézier-Punkten aus \mathcal{D} gleich 0.

Betrachten wir zunächst ein einzelnes Viereck Q . Für jeden Eckpunkt enthält \mathcal{D} nach (i) die drei Punkte aus $D_1(v) \cap T_i$ in einem anliegenden Dreieck T_i . Aus der C^1 -Bedingung in dem Eckpunkt folgt, dass alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte in $D_1(v)$ gleich 0 sein müssen. Ist Q konvex, dann enthält \mathcal{D} nach (ii) für jede Kante von Q den mittleren Punkt P_{111} in einem der beiden angrenzenden Dreiecke. Aus der C^1 -Bedingung über die gemeinsame Kante folgt, dass auch der Koeffizient c_{111} in dem anderen Dreieck 0 sein muss. Also sind alle Koeffizienten der minimalen bestimmenden Menge aus Lemma 2.1 und somit auch alle Koeffizienten aus Q gleich 0. Analog folgt dies auch für ein nicht konvexes Viereck. Nach (ii) enthält \mathcal{D} für mindestens drei der vier Kanten den Bernstein-Bézier-Punkt P_{111} in einem anliegenden Dreieck. Besitzt Q zwei kollineare Kanten, so werden die Punkte aufgrund der Nummerierung nach Lemma 2.3 in den beiden Dreiecken auf der konvexen Seite gewählt. Also sind auch für diese Fälle alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte aus der bestimmenden Menge nach Lemma 2.1 gleich 0.

Als nächstes betrachten wir zwei Vierecke mit einem singulären Eckpunkt. Nach (i) werden für jeden Eckpunkt v der beiden Vierecke drei Punkte aus $D_1(v) \cap T_i$ in einem anliegenden Dreieck T_i gewählt. Somit sind wegen der C^1 -Bedingung im Eckpunkt wieder alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte in $D_1(v)$ gleich 0. Nach (ii) enthält \mathcal{D} für jede äußere Kante den mittleren Punkt P_{111} in einem angrenzenden Dreieck. Aus der C^1 -Bedingung über die gemeinsame Kante berechnet sich wieder der Koeffizient c_{111} in dem anderen Dreieck. Nach (iii) enthält \mathcal{D} einen Bernstein-Bézier-Punkte P_{111} in einem inneren Dreieck des Elements. Damit sind alle Koeffizienten der minimalen bestimmenden Menge gleich 0. \square

Mit der bestimmenden Menge aus Satz 2.4 können wir nun einen Hermite-Interpolanten für $S_3^1(\diamond)$ beschreiben.

Satz 2.5. *Sei $f \in C^1(\Omega)$, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Spline $s \in S_3^1(\diamond)$, der die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) *Für jeden Eckpunkt $v_i \in \diamond$ gelte:*

$$\begin{aligned} s(v_i) &= f(v_i) \\ D_x s(v_i) &= D_x f(v_i) \\ D_y s(v_i) &= D_y f(v_i) \end{aligned}$$

(ii) *Für jede Kante $e \in \diamond$ seien Q_i und $e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}, e_{i,4}$ wie in Satz 2.4 (ii) definiert. Ist Q_i konvex oder gilt $e \neq e_{i,4}$, dann gelte für einen Punkt v im Inneren der Kante e und einen Richtungsvektor z , der nicht parallel zu e verläuft:*

$$D_z s(v) = D_z f(v)$$

(iii) *Für jeden singulären Eckpunkt $v_i \in \diamond$ sei $e \in \diamond$ eine Kante mit Eckpunkt v_i . Dann gelte für einen Punkt v im Inneren der Kante e und einen Richtungsvektor z , der nicht parallel zu e verläuft:*

$$D_z s(v) = D_z f(v)$$

Beweis: Offensichtlich ist die Anzahl der Bedingungen gleich $3V^\diamond + E - N_N^\diamond + S^\diamond$. Nach Satz 1.2 und 1.3 lassen sich die Bernstein-Bézier-Koeffizienten der minimalen bestimmenden Menge aus Satz 2.4 durch die Interpolationsbedingungen berechnen. Somit ist s eindeutig bestimmt. \square

2.2 Interpolation mit C^2 -Splines

Für C^2 -Splines haben Lai und Schumaker [15] den schwierigen Fall $S_6^2(\diamond)$ behandelt und einen Interpolanten beschrieben, der die volle Approximationsordnung besitzt. Wir betrachten hier den Splineraum $S_7^2(\diamond)$ und wählen den Unterraum

$$H_2(\diamond) := \{f \in S_7^2(\diamond) : f \in C^3(v), v \in \diamond\}$$

Wie im Fall $S_3^1(\diamond)$ beschreiben wir zunächst eine bestimmende Menge für einzelne Vierecke und für Elemente mit einem singulären Eckpunkt. Die Nummerierung der Eckpunkte wählen wir hierbei wie im Fall $S_3^1(\diamond)$.

Lemma 2.6. *Sei $Q_i = \diamond(v_{i,1}, \dots, v_{i,4})$ ein konvexes Viereck mit dem inneren Eckpunkt $v_{i,5}$ und $T_{i,j} := \triangle(v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,5})^4$ die vier Dreiecke in Q_i . Dann ist*

$$\mathcal{D} := \bigcup_{j=1}^4 \left(\left\{ P_\alpha^{ij} : \alpha_1 \geq 4 \right\} \cup \left\{ P_{331}^{ij}, P_{322}^{ij}, P_{232}^{ij}, P_{223}^{ij}, P_{304}^{ij}, P_{205}^{ij} \right\} \right) \cup \{v_{i,5}\}$$

eine minimale bestimmende Menge für $H_2(\{T_{i,1}, \dots, T_{i,4}\})$.

⁴ $j + 1$ modulo 4

Beweis: Aus den C^1 und C^2 -Bedingungen über die inneren Kanten des Vierecks sieht man sofort, dass \mathcal{D} eine bestimmende Menge ist. Nach Satz 1.6 folgt

$$\dim H_2(\{T_{i,1}, \dots, T_{i,4}\}) = 65 = |\mathcal{D}|$$

so dass \mathcal{D} minimal ist. □

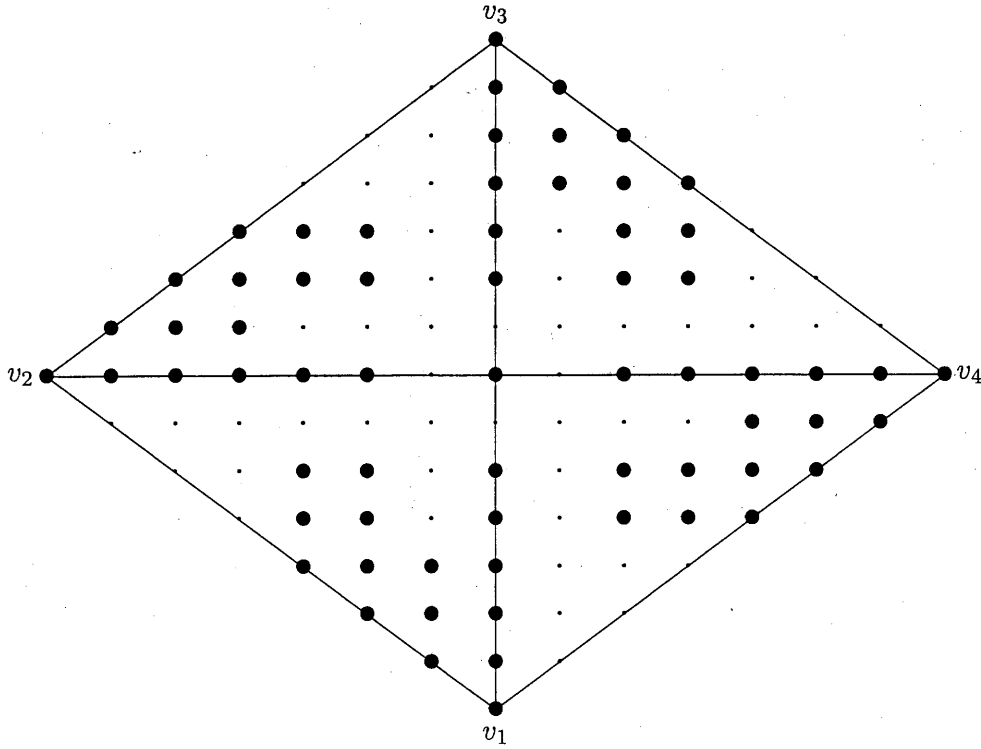


Abbildung 11: Bestimmende Menge für konvexes Viereck

Für nicht konvexe Vierecke müssen wir zwei Fälle unterscheiden und eine andere bestimmende Menge wählen, wenn die beiden Kanten $\overline{v_{i,3}v_{i,4}}$ und $\overline{v_{i,1}v_{i,4}}$ kollinear sind. Das folgende Lemma beschreibt diese bestimmende Menge.

Lemma 2.7. Sei $Q_i = \diamond(v_{i,1}, \dots, v_{i,4})$ ein nicht konvexes Viereck mit dem inneren Eckpunkt $v_{i,5}$ und $T_{i,j} := \triangle(v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,5})$ die vier Dreiecke in Q_i . Wir setzen

$$\tilde{\mathcal{D}} := \bigcup_{j=1}^4 \left(\left\{ P_{\alpha}^{ij} : \alpha_1 \geq 4 \right\} \cup \left\{ P_{331}^{ij}, P_{322}^{ij}, P_{232}^{ij}, P_{223}^{ij}, P_{304}^{ij}, P_{205}^{ij} \right\} \right)$$

und

$$\mathcal{D} := \begin{cases} \tilde{\mathcal{D}} \setminus \left\{ P_{205}^{i3} \right\} & \text{falls } \angle v_{i,3}v_{i,4}v_{i,1} > 180^\circ \\ \tilde{\mathcal{D}} \setminus \left\{ P_{232}^{i4} \right\} & \text{falls } \angle v_{i,3}v_{i,4}v_{i,1} = 180^\circ \end{cases}$$

Dann ist \mathcal{D} eine minimale bestimmende Menge für $H_2(\{T_{i,1}, \dots, T_{i,4}\})$.

Beweis: Sei $\angle v_{i,3}v_{i,4}v_{i,1} > 180^\circ$ und alle Koeffizienten der bestimmenden Menge \mathcal{D} gleich 0, dann ergeben sich alle, bis auf die in Abbildung 12 mit a_1, \dots, a_{12} bezeichneten Koeffizienten direkt aus den C^r -Bedingungen. Seien λ die baryzentrischen Koordinaten von $v_{i,3}$ bzgl. $T_{i,1}$, μ die baryzentrischen Koordinaten von $v_{i,3}$ bzgl. $T_{i,4}$ und γ die baryzentrischen Koordinaten von $v_{i,4}$ bzgl. $T_{i,2}$, dann erhalten wir das Gleichungssystem $Ma' = 0$ mit $a := (a_1, \dots, a_{12})$ und

$$M := \begin{pmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \gamma_3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \gamma_3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \gamma_3 & -1 \\ 2\gamma_2\gamma_3 & \gamma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma_2\gamma_3 & \gamma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma_2\gamma_3 & \gamma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma_2\gamma_3 & \gamma_3^2 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & \mu_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda_1\lambda_3 & 0 & 0 & \lambda_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1\lambda_3 & 0 & 2\lambda_2\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt nun $\lambda_1, \lambda_2, \mu_2, \mu_3, \gamma_2 < 0$ und $\lambda_3, \mu_1, \gamma_3 > 1$, so dass

$$\det M = 2\gamma_2\gamma_3^8\lambda_2(\lambda_3\mu_2 - \lambda_1\mu_3) < 0$$

folgt. Also ist \mathcal{D} eine bestimmende Menge.

Für den Fall $\angle v_{i,3}v_{i,4}v_{i,1} = 180^\circ$ benötigen wir kein Gleichungssystem. Wir können die Koeffizienten schrittweise aus den C^r -Bedingungen berechnen. Zunächst ergeben sich alle, in Abbildung 13 mit \star gekennzeichneten Koeffizienten aus den Differenzierbarkeitsbedingungen an den Kanten und in den Eckpunkten. Anschließend lassen sich alle mit \circ bezeichneten Koeffizienten aus den C^1 - und C^2 -Bedingungen an den inneren Kanten bestimmen. Schließlich erhalten wir die übrigen, mit \star gekennzeichneten Koeffizienten. Also ist \mathcal{D} wieder eine bestimmende Menge.

In beiden Fällen gilt nach Satz 1.6

$$\dim H_2(\{T_{i,1}, \dots, T_{i,4}\}) = 63 = |\mathcal{D}|$$

so dass \mathcal{D} minimal ist. □

Wie im Fall $S_3^1(\diamond)$ müssen wir den Fall zweier Dreiecke mit einem singulären Eckpunkt noch gesondert behandeln. Wir wählen für ein Dreieck Q_i die gleiche bestimmende Menge wie in Lemma 2.7. Da der innere Eckpunkt des Elements singulär ist, können wir für das andere Dreieck die bestimmende Menge so ergänzen, dass wir eine vollständige C^2 -Interpolationsbedingung an den äußeren Kanten erhalten (vgl. Abbildung 14). Damit lassen sich diese Elemente wieder wie konvexe Vierecke behandeln.

Lemma 2.8. Seien $Q_i = \diamond(v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $Q_j = \diamond(v_1, v'_2, v_3, v_4)$ zwei Vierecke, so dass v_4 ein singulärer Eckpunkt in \diamond ist. Weiter sei \mathcal{D}_i die minimale bestimmende Menge nach

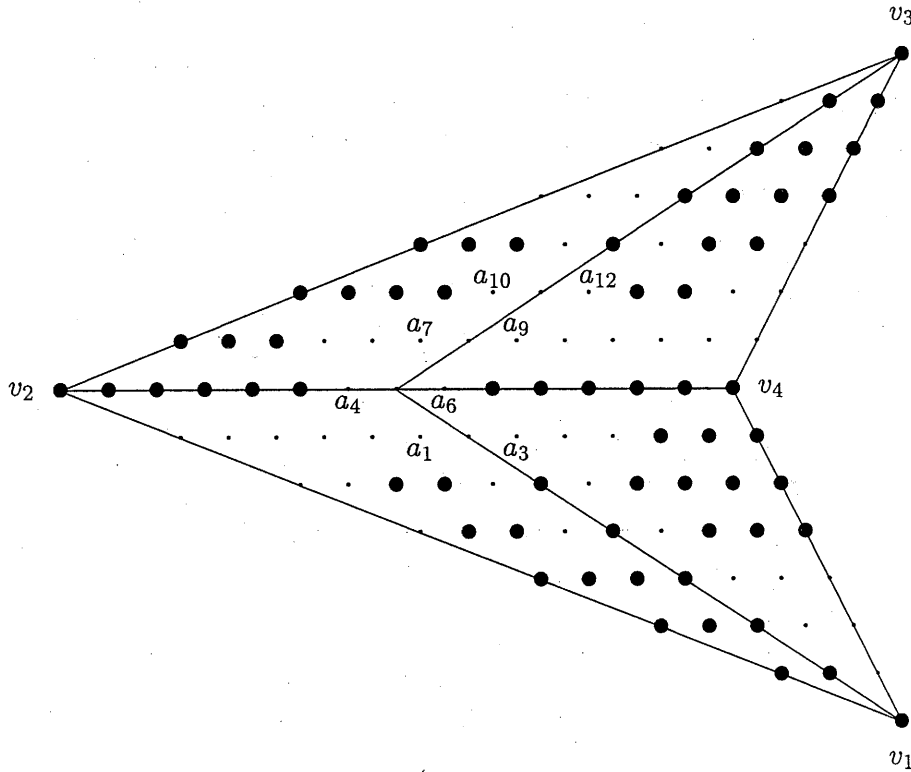


Abbildung 12: Bestimmende Menge für nicht konvexes Viereck

Lemma 2.7 und

$$\mathcal{D}_j := \{P_\alpha^{j_2} : \alpha_1 \geq 4\} \cup \{P_{331}^k, P_{322}^k, P_{232}^k : k \in \{j_1, j_2\}\} \\ \cup \{P_{223}^k, P_{304}^k, P_{205}^k : k \in \{j_1, j_2, j_3, j_4\}\}$$

Dann ist $\mathcal{D} := \mathcal{D}_i \cup \mathcal{D}_j$ eine minimale bestimmende Menge für $H_2(\diamond)$ auf $Q_i \cup Q_j$.

Wir wählen nun für die Quadrangulierung wieder die Nummerierung nach Lemma 2.3. Für diese Nummerierung erhalten wir den folgenden Hermite-Interpolanten.

Satz 2.9. Sei $f \in C^5(\Omega)$, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Spline $s \in H_2(\diamond)$, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Für jeden Eckpunkt $v_i \in \diamond$ und $\mu + \nu \leq 3$ gelte:

$$D_x^\mu D_y^\nu s(v_i) = D_x^\mu D_y^\nu f(v_i)$$

(ii) Für jede Kante $e \in \diamond$ seien Q_i und $e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}, e_{i,4}$ wie in Satz 2.4 (ii) definiert. Weiter sei z ein Richtungsvektor, der nicht parallel zu e verläuft und v_1, v_2, v_3 drei Punkte auf e mit $v_2 \neq v_3$. Dann gelte

$$D_z s(v_1) = D_z f(v_1)$$

$$D_z^2 s(v_2) = D_z^2 f(v_2)$$

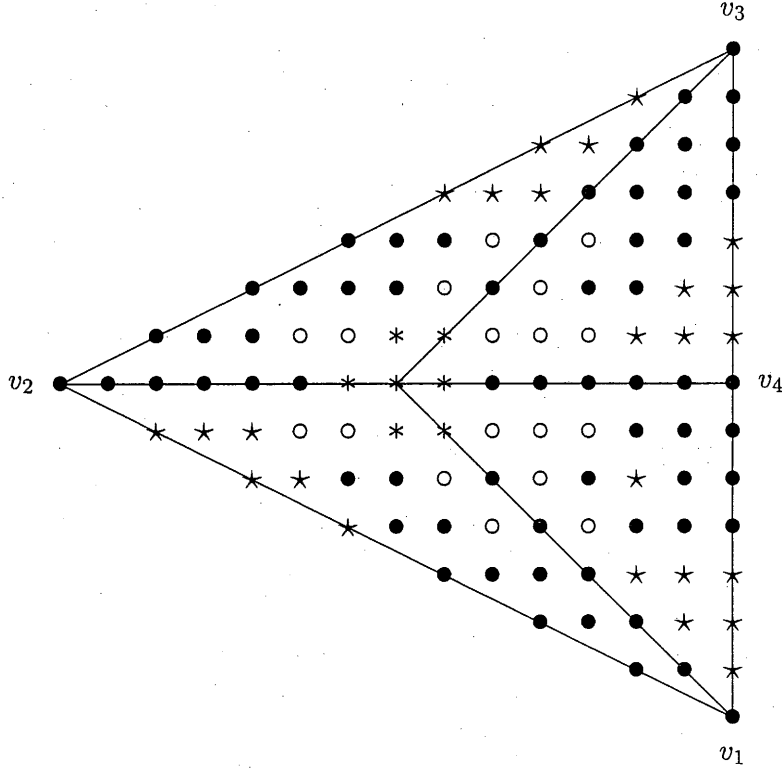


Abbildung 13: Viereck mit zwei kollinearen Kanten

Ist Q_i konvex oder $e_{i,3}$ und $e_{i,4}$ nicht kollinear oder $e_{i,4} \neq e$, dann gelte zusätzlich

$$D_z^2 s(v_3) = D_z^2 f(v_3)$$

(iii) Ist Q_i konvex oder $e_{i,3}$ und $e_{i,4}$ nicht kollinear, dann gelte für $j = 1, 2, 3, 4$:

$$D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,j+1}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j}) = D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,j+1}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j})$$

Sind $e_{i,3}$ und $e_{i,4}$ kollinear, dann gelte:

$$\begin{aligned} D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,j+1}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j}) &= D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,j+1}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j}) & j = 1, 2 \\ D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,4}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j}) &= D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,4}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j}) & j = 1, 3 \end{aligned}$$

(iv) Ist Q_i konvex oder $e_{i,3}$ und $e_{i,4}$ kollinear, dann gelte für $\mu = 4, 5$ und $j = 1, 2, 3, 4$:

$$D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^\mu s(v_{i,j}) = D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^\mu f(v_{i,j})$$

Ist Q_i nicht konvex und $e_{i,3}$ und $e_{i,4}$ nicht kollinear, dann gelte

$$\begin{aligned} D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^\mu s(v_{i,j}) &= D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^\mu f(v_{i,j}) & \mu = 4, 5 \text{ und } j = 1, 2, 4 \\ D_{v_{i,5}-v_{i,3}}^4 s(v_{i,3}) &= D_{v_{i,5}-v_{i,3}}^4 f(v_{i,3}) \end{aligned}$$

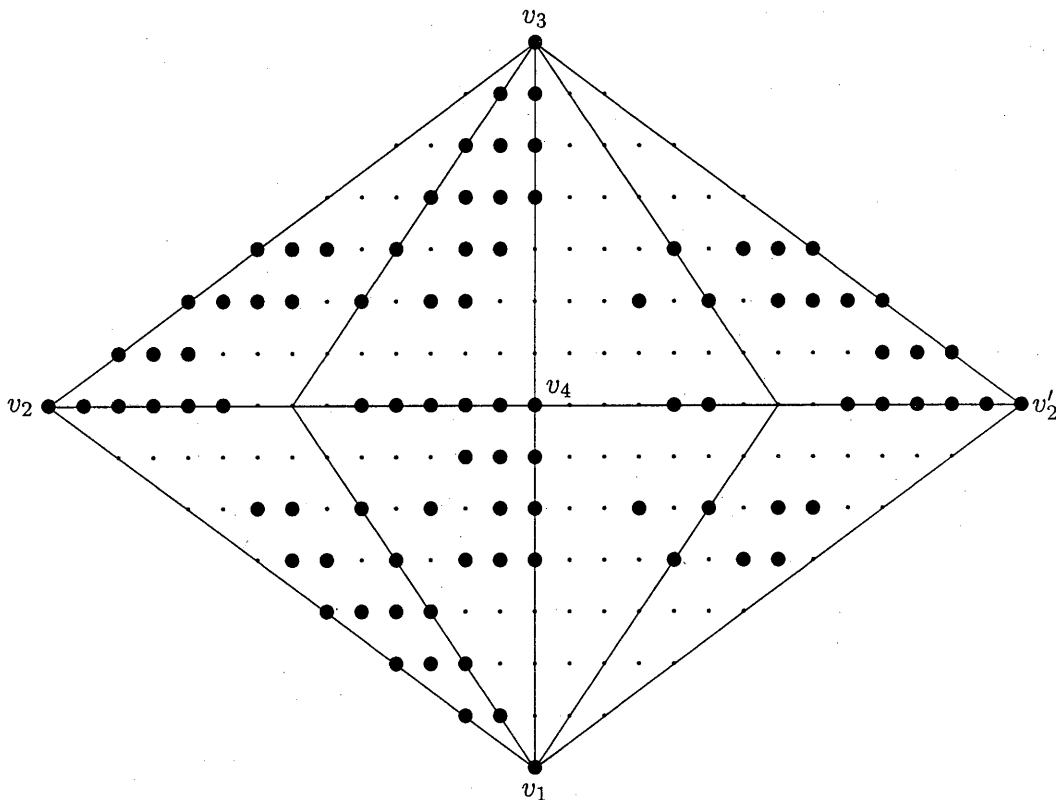


Abbildung 14: Element mit singulärem Eckpunkt

(v) Ist Q_i konvex, dann gelte

$$s(v_{i,5}) = f(v_{i,5})$$

Beweis: Mit Satz 1.2 und 1.3 sieht man leicht, dass durch die Interpolationsbedingungen alle Koeffizienten der bestimmenden Menge aus Lemma 2.6 - 2.8 bestimmt sind. Bezeichnet M die Anzahl der Interpolationsbedingungen und N_D^\diamond die Anzahl der Vierecke mit kollinearen Kanten, dann folgt mit (2):

$$\begin{aligned} M &= 10V^\diamond + (3E^\diamond - N_D^\diamond) + 4N^\diamond + (8N_K^\diamond + 7N_{NK}^\diamond + N_D^\diamond) + N_K \\ &= 36 - 26(V_I^\diamond + N^\diamond) + 13(E_I^\diamond + 4N^\diamond) + S^\diamond + 3N_K^\diamond + N_{NK}^\diamond \end{aligned}$$

Also folgt $\dim H_r(\diamond) = M$ nach Satz 1.7, so dass s eindeutig bestimmt ist. \square

Literatur

- [1] P. Alfeld, B. Piper, L. L. Schumaker: Minimally supported bases for spaces of bivariate piecewise polynomials of smoothness r and degree $d \geq 4r + 1$, Computer Aided Geometric Design 4 (1987): 105-123.

- [2] P. Alfeld, L. L. Schumaker: The dimension of bivariate spline spaces of smoothness r for degree $d \geq 4r + 1$, *Constructive Approximation* 3 (1987): 189-197.
- [3] P. Alfeld, L. L. Schumaker: On the dimension of bivariate spline spaces of smoothness r and degree $d = 3r + 1$, *Numerische Mathematik* 57 (1990): 651-661.
- [4] C. de Boor: B-Form Basics, in *Geometric Modeling* (ed. G. Farin), SIAM Publication, Philadelphia, 1987: 131-148.
- [5] O. Davydov, G. Nürnberger, G. Walz, F. Zeilfelder: Bivariate Splines on Crosscut Partitions, in *Multivariate Approximation*, (ed. G. Nürnberger, J. W. Schmidt, G. Walz), Birkhäuser, Basel, 1997: 189-203.
- [6] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by cubic splines on triangulations, in *Approximation Theory*, (ed. C. K. Chui, L. L. Schumaker), Vanderbilt University Press, Nashville, 1998: 17-24.
- [7] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by splines on triangulations, in *Approximation Theory*, (ed. M. Buhmann, M. W. Müller), ISMN, Dortmund, 1998.
- [8] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Bivariate spline interpolation with optimal approximation order, *Constructive Approximation*.
- [9] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by cubic splines on nested polygon triangulations, in *Vorbereitung*.
- [10] G. Farin: Triangular Bernstein-Bézier patches, *Computer Aided Geometric Design* 3 (1986): 83-127.
- [11] A. Kh. Ibrahim, L. L. Schumaker: Super Spline Spaces of Smoothness r and Degree $d \geq 3r + 2$, *Constructive Approximation* 7 (1991): 401-423.
- [12] M. Laghchim-Lahlou, P. Sablonnière: Quadrilateral finite elements of FVS type and class C^p , *Numerische Mathematik* 70 (1995): 229-243.
- [13] M.-J. Lai: Approximation order from bivariate C^1 -cubics on a four directional mesh is full, *Computer Aided Geometric Design* 11 (1994): 215-223.
- [14] M.-J. Lai: Scattered data interpolation and approximation using bivariate C^1 piecewise cubic polynomials, *Computer Aided Geometric Design* 13 (1996): 81-88.
- [15] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: Scattered Data Interpolation Using C^2 -Supersplines of Degree Six, *SIAM Journal on numerical Analysis* 34 (1997): 905-921.
- [16] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Spline interpolation on convex quadrangulations, in *Approximation Theory IX* (ed. C. K. Chui, L. L. Schumaker) Vanderbilt University Press, Nashville, 1998: 259-266.
- [17] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Lagrange interpolation by splines on triangulations, in *Proceedings on the Morningside Institute* (ed. R. H. Wang), Peking, 1998.

- [18] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Bivariate spline spaces, in *Advances in Multivariate Approximation* (ed. W. Haußmann, K. Jetter, M. Reimer), Dortmund, 1999.
- [19] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by spline spaces on classes of triangulations, erscheint in *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- [20] L. L. Schumaker: On the dimension of spaces of piecewise polynomials in two variables, in *Multivariate Approximation Theory* (ed. W. Schempp und K. Zeller), Birkhäuser, Basel, 1979: 396-412.
- [21] L. L. Schumaker: Bounds on the Dimension of Spaces of multivariate piecewise polynomials, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 14 (1984): 251-264.
- [22] L. L. Schumaker: Dual bases for spline spaces on cells, *Computer Aided Geometric Design* 5 (1988): 277-284.
- [23] L. L. Schumaker: On super splines and finite elements, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 26 (1989): 997-1005.